Bezüglich der kanonischen Basen sind die Matrizen $\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{B} := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ gegeben.

a) Fassen Sie die Matrizen als hintereinander auszuführende Abbildungen **f** und **g** zwischen Vektorräumen **V**, **W** und **Z** auf und entscheiden Sie auf Grund der Struktur der Matrizen, welche Dimensionen die Vektorräume haben müssen und welche Matrix welche Abbildung repräsentiert.

---

b) Bestimmen Sie die Matrix **C**, die zur verknüpften Abbildung von **V** nach **Z** gehört.

---

c) Entscheiden Sie begründet, zu welcher der 3 Matrizen eine Umkehrmatrix existiert.

---

d) Die Matrix **B** stellt eine Abbildung vom $\mathbb{R}^3$ nach $\mathbb{R}^3$ dar. - Sowohl im Urbildraum als auch im Bildraum wird eine Basistransformation durchgeführt, und zwar wird statt der kanonischen Basis

$\mathbf{E} := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ die neue Basis $\mathbf{E}^* := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ betrachtet.

Begründen Sie:

Die Matrix $\mathbf{B}^*$, welche die Abbildung bezüglich der neuen Basis repräsentiert, errechnet sich mit der Matrix $\mathbf{T} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ durch die Matrizenverknüpfung: $\mathbf{B}^* := \mathbf{T}^{-1} \circ \mathbf{B} \circ \mathbf{T}$.

In welchem Vektorraum (Urbildraum oder Bildraum) verändert die Matrix **T** (bzw. $\mathbf{T}^{-1}$) die Basis?

---

e) Bestimmen Sie die inverse (Transformations-) Matrix $\mathbf{T}^{-1}$.

---

f) Führen Sie eine konkrete Proberechnung durch, indem Sie den bezüglich der kanonischen Basis gegebenen Vektor $\vec{\mathbf{b}} := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ abbilden, danach $\vec{\mathbf{b}}$ bezüglich der neuen Basis $\mathbf{E}^*$ darstellen und erneut geeignet abbilden. - Untersuchen Sie beide Bildvektoren auf Verträglichkeit!

Sie dürfen für Ihre Rechnungen ohne Nachweis verwenden, dass $\mathbf{B}^* = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -5 & -2 \\ 5 & -1 & 2 \\ 7 & 9 & 6 \end{pmatrix}$ ist.
