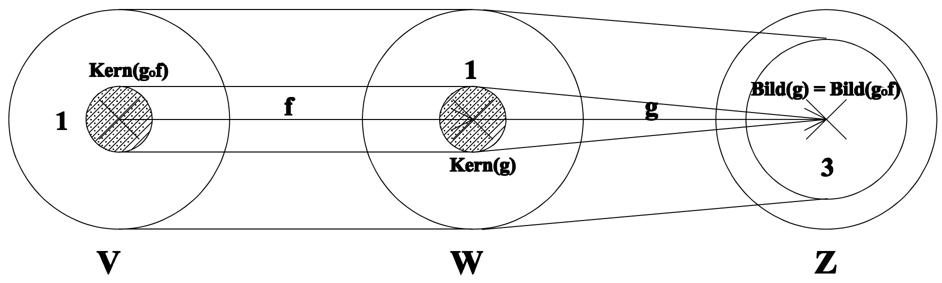
Aufgabe 2: **1.Vorschlag**

Nr	Erwartete Teilleistung / Lösung	Hj	AB	BE	er.	Erläuterungen / Kommentar
a)	$c_{23} = 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 3$; (2. Zeile von B_g - 3.Spalte von A_f)	3	I	2		Zum Nachweis des Verständnisses genügt eine exemplarische Rechnung; auf die Reihenfolge muß geachtet werden!
b)	$\left.\begin{array}{rrrr\|rrrr} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right\} \to \ldots \to \left\{\begin{array}{rrrr\|rrrr} 5 & 0 & 0 & 0 & 3 & -2 & -1 & 4 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -1 & 4 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 2 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right.$ **dim** $\text{Kern}(f) = 0$, weil: $\text{Kern}(f) = \left\{ \vec{0}_V \right\}$	3	II II	8 2		Die Berechnung einer inversen Matrix ist zeitaufwendig und wird wegen der Komplexität, obwohl es eigentlich nur Gauß-Algorithmus ist, dem Anforderungsbereich 2 zugeordnet. Der Schluß von der Existenz der Umkehrabbildung auf die Dimension des Kerns ist keine Reproduktion.
c)	$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 7 \\ -6 \\ -9 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_Z \; ; \; \Rightarrow \begin{pmatrix} 7 \\ -6 \\ -9 \\ 8 \end{pmatrix} \in \text{Kern}(g \circ f)$	3	I	3		
d)	$\left.\begin{array}{rrrr\|r} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right\} \to \ldots \to \left\{\begin{array}{rrrr\|r} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right. ; L_i = \left\{ \vec{w} \;\middle\|\; \vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} ; k \in \mathbb{R} \right\}$ **dim** $\text{Bild}(g) = 3$, $\text{Bild}(g) = \mathcal{L}\left(\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \right)$	3	I	5 2		Hier überwiegt Anforderungsbereich 1, weil eigentlich nur ein LGS gelöst wird. Oft vergessen wird der Nachweis der Linearen Unabhängigkeit der erzeugenden Vektoren von Bild(f); hier findet man eigentlich Niveau 2.
e)	Es gilt: $\text{Kern}(g) = \mathcal{L}\left(\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right)$ und f^{-1} existiert. Damit ist Kern(g) ≅Kern(g∘f), und weil außerdem gilt: $g \circ f \left(\begin{pmatrix} 7 \\ -6 \\ -9 \\ 8 \end{pmatrix} \right) = \vec{0}_Z$ gibt es ein geeignetes $c \in \mathbb{R}$ mit: $f(\vec{v}) = c \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. $\frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & -2 & -2 \\ -1 & 4 & 2 & -3 \\ 2 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -6 \\ -9 \\ 8 \end{pmatrix}$	3	III II	4 3		Der Dimensionssatz wird im Unterricht abbildungstheoretisch interpretiert werden. Nicht behandelt werden wird der hier neue Sachverhalt für verkettete Abbildungen, wobei für die Schüler verwirrend ist, dass Kern(f) und Kern(g∘f) verschieden sind, obwohl beides Unterräume von V sind und Urbildmengen des Nullvektors aus dem $\mathbb{R}^4$ darstellen. Selbst wenn es natürlich möglich ist, $f(\vec{v})$ in einer Nebenrechnung zu bestimmen, so bleiben die sichere Argumentation und graphische Interpretation (Teil f)) des Sachverhaltes im Venn-Diagramm Anforderungsbereich 3. Da die inverse Matrix angegeben ist und erwartet werden kann, dass L_h in Teil d) erkannt wird, hängt die “Proberechnung” nur z.T. vom Niveau 3 ab.

f)	 Nach dem Dimensionssatz ist 4 hier die Dimension des Vektorraumes V.	3	III II	4 2		Da alle 3 Vektorräume vierdimensional sind, setzt die Frage nach dem Raum, auf den sich der Dimensionssatz bezieht, sicheres Urteilsvermögen voraus, insbesondere weil ja Kern (f) und Bild (f) Unterräume verschiedener Vektorräume sind!
				35		